ECOLE DE MANAGEMENT EUROPÉEN

- CONCOURS 1987 - MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATH I Régime Général **COEFFICIENT** : 4

JOUR : Mardi 2 juin 1987 **DURÉE** : 4 heures

Pour les calculs numériques, les candidats utiliseront les tables fournies avec le sujet.

Exercice I (3 points)

$\mathbf{R}[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient u et v les applications de $\mathbf{R}[x]$ dans lui-même définies par

$$\forall P \in \mathbf{R}[x] \qquad [u(P)](x) = xP(x)$$
$$[v(P)](x) = P'(x)$$

où P' note le polynôme dérivé de P.

1) Montrer que u et v sont 2 endomorphismes de $\mathbf{R}[x]$.

2) Déterminer $v \circ u - u \circ v$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$, où u^n note $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n termes) pour $n \geq 1$ et $u^0 = I$ (application identique).

Exercice II (5 points)

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, on note, pour x réel > 0

$$P_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1) Montrer que l'équation : $x \in \mathbf{R}^{+*}$, $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $0 < x_n \leq 1$.

2) Montrer, en considérant $P_{n+1}(x_n)$, que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge. Soit l sa limite.

3) a) Prouver que : $\forall n \geq 2$, $0 < x_n \leq x_2 < 1$.
En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1} = 0.$$

b) En trouvant une expression simplifiée de $P_n(x)$ sous forme de quotient, montrer que $l = \frac{1}{2}$.

4) a) En posant $x_n = \frac{1}{2} + \epsilon_n$, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)\epsilon_n = 0.$$

b) En déduire que, quand n tend vers $+\infty$, $(x_n - \frac{1}{2}) \sim (\frac{1}{2})^{n+2}$.

Problème (12 points)

N.B. : les parties I et II sont très largement indépendantes.

On note $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

— I —

1) Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 1. On notera φ le prolongement par continuité de f.

2) Montrer que φ est dérivable au point 1 et calculer $\varphi'(1)$.

3) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$. φ' est-elle continue en 1?

4) a) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par $h(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x$.

b) En déduire le signe de $\varphi'(x)$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ et dresser le tableau de variations de φ.

c) Tracer la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé (unités graphiques : 2 cm).

5) En utilisant les variations de φ, montrer que :
$\forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad \ln x \leq x - 1$.

— II —

1) a) Montrer, par exemple à l'aide d'une dérivation, que :

$$\forall h < 1 \quad \ln(1-h) = -(h + \frac{h^2}{2} + \cdots + \frac{h^n}{n}) - \int_0^h \frac{t^n}{1-t} dt \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

On notera $f_n(h) = \int_0^h \frac{t^n}{1-t} dt$. On suppose désormais $h \in]0,1[$.

b) Montrer que si $t \in [0,h]$, on a $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{h^n}{1-t}$ puis que

$$0 \leq f_n(h) \leq h^n \ln(\frac{1}{1-h}).$$

c) En déduire que $\dfrac{f_n(h)}{h}$ est intégrable sur $[0, \frac{1}{2}]$ pour $n \geq 1$, et que

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{f_n(h)}{h} dh \leq \ln 2 . \frac{1}{n 2^n}.$$

2) a) Montrer que

$$\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{n} u_k + \int_0^{1/2} \frac{f_n(h)}{h} dh, \quad \text{où } u_k = \frac{1}{2^k k^2}.$$

b) Montrer que la série de terme général u_k converge et déduire de ce qui précède que sa somme vaut $\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx$.

3) Montrer que

$$\sum_{k=10}^{\infty} u_k < \frac{1}{2^9 . 10^2}.$$

En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_{1/2}^1 \varphi(x) dx$.

———